Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 1 , Abgabe: 20.04.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)

1. Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3$

$$If = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

   (a) mit der geschlossenen Formel von Newton-Cotes

$$I_n^{NC} f = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

   ($n+1$ gleichverteilte Stützstellen $x_k = -1 + k\frac{2}{n}$, $0 \le k \le n$).

   (b) mit der Formel von Gauß-Legendre für $w(x) = 1$

$$G_n f = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}).$$

   (Hinweis: Die Stützstellen $x_k^{(n)}$ und Gewichte $A_k^{(n)}$, $1 \le k \le n$, findet man für kleine n in vielen Numerik-Büchern.)

2. Geben Sie in allen Fällen eine Fehlerabschätzung an (s. Satz 3.1 und Satz 3.4) und vergleichen Sie diese mit den exakten Integrationsfehlern

$$E_n = |I - I_n^{NC}| \quad \text{bzw.} \quad E_n = |I - G_n|.$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Die Orthogonalpolynome $L_n(x)$ des Gaußschen Integrationsverfahrens für $[a,b] = [0,\infty]$ und $w(x) = e^{-x}$ heißen **Laguerre-Polynome.** Bestimmen Sie $L_o(x)$, $L_1(x)$ und $L_2(x)$ mit dem Verfahren von Schmidt.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Stützpunkte x_i und die Gewichte A_i für die Gauß-Laguerrsche-Formel

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)
Es seien

$$If = \int_a^b f(x)\, dx,$$

und $A_k^{(n)}$, $x_k^{(n)}$ die Gewichte und Stützstellen der Gaußschen Integrationsformel

$$I_n f = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$$

zum Intervall $[a, b]$ und der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$. Beweisen Sie folgende Richtung des Satzes von Stekloff und Polya: Falls

1. $I_n p \to Ip$ gleichmäßig für jedes Polynom auf $[a, b]$, und
2. eine Konstante K existiert derart, daß $\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

dann $I_n f \to If$ gleichmäßig für alle $f \in C[a, b]$.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 2 , Abgabe: 04.05.00 , 13.00 Uhr

Sei $-\infty < a < b < +\infty$, $\omega(x) \in C[a,b]$, $\omega(x) > 0$ für $x \in (a,b)$. Sei für $f, g \in C[a,b]$,

$$(f,g) := \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx,$$

$$\|f\| := (f,f)^{1/2},$$

Sei $\{\pi_0, \pi_1, ...\}$ ein Orthogonalsystem:

1. $\pi_k \in \mathbb{P}_k, \quad k \in \mathbb{N}$,
2. $(\pi_j, \pi_k) = \delta_{jk}$ (Kronecker Symbol).

Für $f \in C[a,b]$ werden die FOURIER-Koeffizienten definiert.

$$c_k := (f, \pi_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie folgende:

Aufgabe 5: (5 Punkte)
TOEPLER: Sei

$$U(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \pi_k(x).$$

Das Integral

$$F(U) := \|U - f\|^2 = \int_a^b \omega(x) |U(x) - f(x)|^2 dx$$

wird durch (den Abschnitt der FOURIER-Reihe von $f(x)$)

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k \pi_k(x),$$

minimiert. Das Minimum hat den Wert

$$F(s_n) = \|s_n - f\|^2 = (f,f) - \sum_{k=0}^{n} c_k^2$$

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2$$

konvergiert und die (BESSELSCHE) Ungleichung erfüllt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \le \|f\|^2$$

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Zeigen Sie, eventuell mit Hilfe des Satzes von WEIERSTRASS, dass (die PARSEVALSCHE-Gleichung) gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$$

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Benutzen Sie die Methode von Nyström und die Gaußschen Integrationsformel

$$\int_{-1}^{+1} g(s)ds \doteq g(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + g(+\frac{1}{\sqrt{3}})$$

um die Integralgleichung von LOVE

$$f(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{f(s)}{1+(s-t)^2}ds = 1, \qquad -1 \le t \le 1$$

numerisch zu approximieren (d. h. f in den Punkten

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

approximieren).

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 3 , Abgabe: 11.05.00 , 13.00 Uhr

Die Gauß-Hermitesche Formel für $n = 2$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) \tag{1}$$

mit

$$A_1 = A_2 = 0,886227,$$
$$x_1 = -x_2 = 0,707107$$

und $p_2(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - \frac{1}{2}$.

Aufgabe 9: (4 Punkte)

1. Approximieren Sie mit der Formel (1) das Integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-x^2}\, dx.$$
2. Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler mit Hilfe der entsprechenden Fehlerformel an. (Skript Satz 3.4 (3))
3. Ermitteln Sie den exakten Fehler. Der exakten Wert des Integrals ist $\Gamma(7/2)$.

Aufgabe 10: (5 Punkte)
Betrachten Sie die Integrationsformel nach Gauß

$$\int_a^b \omega(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{m} a_k f(y_k) + \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(x_k), \tag{2}$$

wobei die Abszissen y_k vorab fest vorgeschrieben sind. Die $m + 2n$ Konstanten a_k, ω_k und x_k sind so zu bestimmen, dass (2) exakt ist für Polynome mit Grad $m + 2n - 1$. Betrachten Sie die Polynome

$$r(x) = (x - y_1)(x - y_2) \cdots (x - y_m),$$
$$s(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Beweisen Sie folgenden Satz:
Die Regel (2) ist exakt für alle Polynome mit Grad $\leq m + 2n - 1$ genau dann, wenn

1. sie ist exakt für alle Polynome mit Grad $\leq m+n-1$,
2. $\int_a^b \omega(x)r(x)s(x)p(x)\,dx = 0$ für jedes Polynom $p(x)$ vom Grad $\leq n-1$.

Programmieraufgabe 11: Abgabe 18.05.00 (10 Punkte)
Benutzen Sie die zusammengesetzte Simpson-Regel mit $2m+1$ äquidistanten Stützpunkten $x_0, \cdots, x_{2m}$ mit $h_m = \frac{b-a}{2m}$, für $m = 2^{k-1}$, $1 \leq k \leq 10$, um das Integral

$$I = \int_{-4}^{4} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\arctan 4$$

zu approximieren. Geben Sie folgendes ab:

1. Eine Auflistung Ihres Programmes,
2. Eine Tabelle des Fehlers $F_m = I - I_2^{NC,m}$
3. Einen Graph, z.B. mit gnuplot, von m gegenüber F_m/h_m^5.

Führen Sie die Berechnungen mit doppelter Genauigkeit (double) aus.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 4 , Abgabe: 18.05.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 12: (2 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 5 & \frac{i}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 5i \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie den Satz von Gerschgorin für A und A^T. Bestimmen Sie damit die beste Abschätzung der Eigenwerte von A.

Aufgabe 13: (7 Punkte)

1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass $e = (1,1,1)^T$ ein Eigenvektor von A ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert. (1 Punkt)

2. Berechnen Sie mit Hilfe des charakteristischen Polynoms $\chi(A)$ die restlichen Eigenwerte und -vektoren. (2 Punkte)

3. Bestimmen Sie sämtliche Eigenwerte und -vektoren von A mit

   (a) Matlab, (2 Punkte)

   (b) Mathematica. (2 Punkte)

Aufgabe 14: (5 Punkte)
Sei $A = xy^H$, wobei x und y Vektoren aus $\mathbb{C}^n$ sind, mit $x \neq 0 \neq y$. Zeigen Sie:

1. A besitzt höchstens einen von Null verschiedenen Eigenwert λ_1 mit algebraischer Vielfachheit 1. (2 Punkte)

2. $\lambda_1 = y^H x$. (1 Punkt)

3. x ist rechter und y ist linker Eigenvektor zu $\lambda_1 = y^H x$. (1 Punkt)

4. Welche geometrische Vielfachheit besitzt der Eigenwert $\lambda_2 = 0$? (1 Punkt)

Aufgabe 15: (5 Punkte)

1. A sei eine $n \times n$ reelle symmetrische Matrix, L eine normierte linke Dreiecksmatrix, D eine Diagonalmatrix, und

$$A = LDL^T.$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der negativen Eigenwerte von A gleich die Anzahl der negativen Eigenwerte von D ist.
(Hinweis: Sylvesterscher Trägheitssatz)

2. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LDL^T Zerlegung von $A - \mu I$ für verschiedene $\mu \in \mathbb{Z}$, und bestimme dadurch $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$, so dass

$$\mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \lambda_2 < \mu_3$$

wobei λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A sind.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 5 , Abgabe: 25.05.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 16: (4 Punkte)
A sei eine $n \times n$ reelle symmetrische Matrix mit n paarweise unterschiedlichen Eigenwerten. $A_0 := A$, und $A_1, A_2, \ldots$ werden durch das klassische Jacobi-Verfahren berechnet, wobei die Bedingung $|\varphi_k| \le \frac{\pi}{4}$ eingehalten wird. Es ist bekannt (Skript) das $S(A_k) \to 0$.
Zeigen Sie:

1. $a_{ij}^{(k)} \to 0$ für $k \to \infty$ für $1 \le i < j \le n$.

2. Die Eigenwerte können so numeriert werden, dass

$$a_{ii}^{(k)} \to \lambda_i, \text{ für } k \to \infty, \quad 1 \le i \le n.$$

Aufgabe 17: (2 Punkte)
Berechnen Sie von Hand die Eigenwerte und -vektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom.

Aufgabe 18: (2+2 Punkte)

1. Führen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die ersten beiden klassischen Jacobi-Iterationen aus.

2. Bestimmen Sie anschließend 3 paarweise disjunkte Gerschgorin–Kreisscheiben.

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Wieviele Rechenoperationen müssen durchgeführt werden, um einen Schritt des Jacobi-Verfahrens, nach Rutishauser -siehe Skript S. 30, für eine symmetrische $n \times n$ Matrix durchzuführen (Additionen,Subtraktionen, Divisionen, Multiplikationen und Wurzel ziehen). Beweisen Sie Ihre Aussage.

Programmieraufgabe 20: Abgabe 01.06.00 (10 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie, beginnend mit $x^{(0)}$, 100 Schritte der Vektoriteration zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes λ_1 von A in Gleitkommaarithmethik durch. Bestimmen Sie dann einen approximativen Eigenvektor mit Hilfe inverser Vektoriteration.

Diplomarbeiten: Wer in absehbarer Zeit eine Diplomarbeit im numerischen Institut schreiben möchte, melde sich bitte bei Herrn Stypa, Zimmer 114, zwecks Vorbesprechung.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 6 , Abgabe: 02.06.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 21: (2+2 Punkte)
Es sei A eine $n \times n$ obere Hessenberg-Matrix und $A = QR$, $A' = RQ$ die QR-Transformation von A. Zeigen Sie, daß

1. die Transformation mit $O(n^2)$ Rechenschritten durchführbar ist.
2. A' ebenfalls eine obere Hessenberg-Matrix ist.

Aufgabe 22: (4 Punkte)
Berechnen Sie zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die QR-Transformation A'.

Aufgabe 23: (4 Punkte)

1. Bestimmen Sie per Hand eine Lösung des Anfangwertproblems
$$y'(x) = 2y^2 - 8, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x$$
2. Geben Sie den maximalen Existenzbereich $[0, d)$, $d \leq \infty$, der Lösung an.
3. Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe 24: (4 Punkte)
A sei eine $n \times n$ reelle reguläre Matrix.
Zeigen Sie, dass die QR Zerlegung von $A = QR$ eindeutig ist, wobei Q eine orthogonale Matrix ist und R eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 7 , Abgabe: 08.06.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 25: (4 Punkte)

$$\rho(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k$$

erfülle

1. $\alpha_0 \neq 0$
2. $\alpha_k \in \mathbb{Z}$
3. Alle Wurzeln ζ von ρ erfüllen die Bedingung $|\zeta| \leq 1$.

Zeigen Sie, daß alle Wurzeln von ρ Einheitswurzeln sind, d.h. für jede Wurzel von ρ gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\zeta^M = 1$. (Dieser Satz wird Kronecker zugewiesen.)

Aufgabe 26: (4 Punkte)
In der Vorlesung, und im Skript, wird das 3-Schritt Adams-Bashforth Verfahren hergeleitet. Bestimmen Sie auf ähnlicher Weise das 3-Schritt Adams-Moulton Verfahren.

Aufgabe 27: (3+3+3+10 Punkte)
Betrachten Sie das vereinfachte Hase-Luchs System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 x_2 \end{aligned} \tag{1}$$

oder, kurz,

$$\dot{x} = f(x). \tag{2}$$

1. Bestimmen Sie den nicht trivialen Ruhepunkt $x^{(0)}$.
2. In der Nähe von $x^{(0)}$ kann die Gleichung (1) linearisiert werden:

   $$\dot{y} = F(x^{(0)})y \tag{3}$$

   wo $x(t) = x^{(0)} + y(t)$ und $F(x)$ die Jacobi-Matrix zu $f(x)$ ist. Bestimmen Sie die Gleichung (3).
3. Mit dem Ansatz

   $$y(t) = A\begin{pmatrix} sin\ \alpha t \\ cos\ \alpha t \end{pmatrix},$$

$A \in Mat(2 \times 2, \mathbb{R})$, bestimmen Sie die Lösung von (3) mit der Anfangsbedingung:

$$y(0) = y^{(0)} := (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})^T. \tag{4}$$

Was ist die Periode dieser Lösung ?

4. **Abgabe: 15.06.2000**
   Implementieren Sie das klassische Runge-Kutta Verfahren 4-ter Ordnung und benutzen Sie es, um die periodische Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x^{(0)} + y^{(0)} \end{aligned}$$

   zu berechnen. Bestimmen Sie die Periode mit einer Genauigkeit von mindestens 10^{-4}.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Übungsblatt 8 , Abgabe: 22.06.00 , 13.00 Uhr

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Es werde das durch

$$\eta_{j+2} + a_1\eta_{j+1} + a_0\eta_j = h[b_0 f(x_j, \eta_j) + b_1 f(x_{j+1}, \eta_{j+1})]$$

gegebene Prediktor-Verfahren betrachtet.

1. Man bestimme a_0, b_0 und b_1 in Abhängigkeit von a_1 so, daß man ein Verfahren mindestens 2. Ordnung erhält.
2. Für welche a_1-Werte ist das so gewonnene Verfahren stabil?
3. Welche speziellen Verfahren erhält man für $a_1 = 0$ und $a_1 = -1$?
4. Läßt sich a_1 so wählen, daß man ein stabiles Verfahren 3. Ordnung bekommt ?

In Aufgaben 29 bis 31 betrachte man die Milne Methode (ein lineares Mehrschrittverfahren):

$$y_{n+2} - y_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n). \tag{1}$$

Aufgabe 29: (2 Punkte)
Überprüfen Sie ob die Milne Methode

1. stabil
2. konsistent

ist.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Ordnung der Milne Methode.

Aufgabe 31: (6 Punkte)
Für die Gleichung

$$y' = Ay$$

nimmt die Milne Methode die einfachere Form an

$$y_{n+2} - y_n = \frac{hA}{3}(y_{n+2} + 4y_{n+1} + y_n). \tag{2}$$

Seien ξ_1 und ξ_2 die Nullstellen von $\rho(z) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von (2)

$$y_n^h = a_1(\lambda_1(h))^n + a_2(\lambda_2(h))^n \tag{3}$$

ist, wobei a_1 und a_2 beliebige Konstanten sind, und $\lambda_1(h)$ und $\lambda_2(h)$ die Nullstellen des Polynoms

$$\rho(\lambda) - hA\sigma(\lambda) = 0$$

sind.

2. Bestimmen Sie $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned} \lambda_1(h) &= \xi_1(1 + \mu_1 h) + O(h^2) && (4) \\ \lambda_2(h) &= \xi_2(1 + \mu_2 h) + O(h^2) && (5) \end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, mit Hilfe von (3),(4) und (5), dass

$$y_n^h \approx a_1 e^{Ax_n} + a_2(-1)^n e^{-(Ax_n)/3}$$

mit $x_n := nh$.

Prof. Dr. C. W. Cryer SS 2000

Numerische Mathematik II

Vorklausur

Aufgabe 1:

1. Zeigen Sie, dass die Gaußsche Integrationsformel $G_n p = \int_a^b w(x)p(x)dx$ für alle Polynome $\in P_{2n-1}$ exakt ist.
2. Warum gibt es keine Formel G_n, die in P_{2n} exakt ist?

Aufgabe 2:
Führen Sie zwei Jacobi-Iterationen für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

aus, und bestimmen Sie drei paarweise disjunkte Gerschgorin-Kreisscheiben, die je einen Eigenwert von A enthalten.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie Stützstellen x_1, x_2 und Gewichte A_1, A_2, so dass die Gauß-Cryer-Bronstering Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx \simeq A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

für $f \in P_3$ exakt ist.

Aufgabe 4:

(a) Sei $x = (4,3)^T \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Householder Matrix H, so daß

$$Hx = \begin{pmatrix} -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

(b) Sei

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Führen Sie einen Schritt des QR-Verfahrens (mit Hilfe der Householder- Matrizen) aus.

Aufgabe 5:

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangwertproblems

$$y'(x) = 1 - y^2,\ y(0) = 1$$

(b) Geben Sie den maximalen Existenzbereich $[0, d)$, $d \le \infty$, der Lösung an.

(c) Skizzieren Sie die Lösung.

Aufgabe 6:
Welche Bedingungen müssen a_3, a_0, b_2, b_1 erfüllen, damit das lineare Mehrschnittverfahren

$$a_3 y_{i+3} - a_0 y_i = h(b_2 f_{i+2} + b_1 f_{i+1})$$

die Ordnung 2 besitzt?

Aufgabe 7:
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils eine knappe Begründung.

(a) Die QR-Transformation läßt symmetrische Matrizen symmetrisch.

(b) Sei $f \in C[-1,1], If := \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx, I_n f := \sum\limits_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ = die Newton-Cotes-Formel zu n äquidistanten Stützstellen in $[-1,1]$, dann $I_n f \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} If$.

(c) Es sei $x \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum, dann gibt es genau eine Bestapproximation $u \in U$ zu x.

(d) Es gibt genau ein explizites Einschrittverfahren 2. Ordnung.

Aufgabe 8:
Berechnen Sie zu $x(t) = 1 + t^5$, $0 \le t \le 1$, eine Bestapproximation $u \in$ Span $\{1, t\}$

(a) in $L^2(0,1)$

(b) in $C(0,1)$

Aufgabe 9:

(a) Definieren Sie die Begriffe *Konsistenz*, *Stabilität* und *Konvergenz* für ein lineares r-Schrittverfahren (ϱ, σ).

(b) Sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\varrho(z) = \sum_{i=0}^{r} a_i z^i$ mit $|\xi| = 1$. Zeigen Sie, daß $y_k = \xi^k$ eine Lösung der Differenzengleichung $\sum_{i=0}^{r} a_i y_{i+k} = 0$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß wenn (ϱ, σ) ein konvergentes Verfahren und $\varrho(\xi) = 0$ für ein $\xi \in \mathbb{C}$, dann folgt $|\xi| \leq 1$.

Aufgabe 10:
Zeigen Sie, dass das Einschrittverfahren zur Lösung von $y' = f(x, y)$,

$$y_{i+1}^h = y_i^h + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i^h + \frac{h}{2} f(x_i, y_i^h))$$

die Ordnung 2 hat.

Aufgabe 11:
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es seien $Ax = b$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ beliebig, und $\{x^{(k)}\}$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + b,$$

$k \geq 0$. Zeigen Sie, dass $x^{(k)} \to x$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 12:
Sei $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$, und $\epsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Vektornorm $|| \cdot ||_\Delta$ gibt, so dass

$$||A||_\Delta := \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||_\Delta}{||x||_\Delta} < \rho(A) + \epsilon.$$